Probabilités et amplitudes quantiques

1) La polarisation de la lumière.

A) Théorie ondulatoire classique

. Faisceau lumineux en théorie classique $\to$ onde électromagnétique $\vec{\mathcal{E}}, \vec{B}, \omega, \vec{k}$.

. $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{B}$: fonctions sinusoïdales de $u = \omega t - \vec{k}.\vec{r}$; $\vec{\mathcal{E}}.\vec{k} = \vec{B}.\vec{k} = 0$; $\vec{\mathcal{E}} = \vec{B} \times \vec{k}$

. Polarisation de l'onde $\to$ direction de $\vec{\mathcal{E}}$

. $\vec{k}$ suivant Oz $\Rightarrow$ $\vec{\mathcal{E}} : (\mathcal{E}_{0x} \sin(\omega t - \varphi_x), \mathcal{E}_{0y} \sin(\omega t - \varphi_y), 0)$, $r = \frac{\mathcal{E}_{0y}}{\mathcal{E}_{0x}}$, $\delta = \varphi_y - \varphi_x$

. État de polarisation elliptique = superposition de deux états de polarisation rectiligne.

B) Analyse d'un état de polarisation quelconque.

. Lame biréfringente $\to$ $\mathcal{E}.\vec{c} = \mathcal{E}(\vec{c}.\vec{a})\,\vec{a} + \mathcal{E}(\vec{c}.\vec{b})\,\vec{b}$

2) Probabilités de transition et grandeurs physiques

A) Polarisation et photons.

. Flux de photon de l'onde incidente : N $\Rightarrow$ flux d'énergie $I = |\mathcal{E}|^2 = N\hbar\omega$

. Lame biréfringente $\to$ $I_a = |\mathcal{E}(\vec{c}.\vec{a})|^2 = I\cos^2\theta = N_a\hbar\omega$, $I_b = |\mathcal{E}(\vec{c}.\vec{b})|^2 = I\sin^2\theta = N_b\hbar\omega$

$\Rightarrow N_a = N\cos^2\theta$, $N_b = N\sin^2\theta$, $N = N_a + N_b$

. $P_a = \lim_{N\gg 1} \frac{N_a}{N} = \lim_{N\gg 1} \frac{N_a\hbar\omega}{N\hbar\omega} = \frac{I_a}{I} = \cos^2\theta$; $P_b = \sin^2\theta$; $P_a + P_b = 1$

P_a et P_b : probabilités de transition : $P(\vec{a} \leftarrow \vec{c}) = \cos^2(\vec{a},\vec{c}) = \cos^2\theta$; $P(\vec{b} \leftarrow \vec{c}) = \sin^2\theta$

B) La polarisation comme grandeur physique.

. Polarisation rectiligne. États de polarisation initiale $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ $\Rightarrow$ états propres de la polarisation dans la base $(\vec{a},\vec{b})$ $\to$ valeurs propres dans la base $(\vec{a},\vec{b})$: $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $(\vec{a} \perp \vec{b})$

Deux bases différentes $\to$ $(\vec{a},\vec{b})$ et $(\vec{a}',\vec{b}')$ $\to$ deux grandeurs physique incompatibles

. Polarisation circulaire ($r = 1$, $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$). États de polarisation circulaire droite ou gauche (D, G) ; $D \to (\mathcal{E}_0\cos(\omega t - \varphi), \mathcal{E}_0\sin(\omega t - \varphi), 0)$; $G \to (\mathcal{E}_0\cos(\omega t - \varphi), -\mathcal{E}_0\sin(\omega t - \varphi), 0)$

. Toute onde de polarisation définie peut s'écrire comme une superposition d'ondes de polarisations circulaires droites et gauches.

. La polarisation circulaire ne dépend pas de l'orientation des axes géométriques.

. Valeurs propres ($D \to +1$, $G \to -1$) $\Rightarrow$ états propres | Une seule décomposition possible (D ou G)

C) Etats et grandeurs quantiques.

. A une grandeur physique quantique $\mathcal{A}$ correspond un ensemble d'états propres $\{u_m\}$ $(m=1,2,\dots)$, et de valeurs propres associées $\{a_m\}$

. Les états propres présentent quant à leurs probabilités de transition les propriétés de disjonction $\left(P(u_m \leftarrow u_{m'}) = 0 \ \forall m, m'; m \neq m'\right)$ et de complétude $\left(\sum_m P(u_m \leftarrow v) = 1 \text{ pour tout état } v\right)$

. Une mesure de la grandeur $\mathcal{A}$ sur un système dans un état initial quelconque v fournit l'une des valeurs propres a_m avec la probabilité de transition $P(u_m \leftarrow v)$, et l'état du système est alors projeté vers l'état u_m : le système est dans l'état final u_m.

3) Amplitudes de probabilité.

A) Point de vue ondulatoire. (Champ électrique de l'onde électromagnétique).

. état de polarisation initial : $\vec{\iota}$; $\vec{g}$ direction caractéristique d'un polaroïd π_g $(\vec{\iota} \perp \vec{g})$

. $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{\iota} = \mathcal{E}(\vec{\iota}.\vec{a})\vec{a} + \mathcal{E}(\vec{\iota}.\vec{b})\vec{b} \rightarrow \mathcal{E}\vec{g} = \mathcal{E}(\vec{\iota}.\vec{a})(\vec{a}.\vec{g})\vec{g} + \mathcal{E}(\vec{\iota}.\vec{b})(\vec{b}.\vec{g})\vec{g} = \mathcal{E}\cos\theta\sin\theta\vec{g} - \mathcal{E}\sin\theta\cos\theta\vec{g} = \vec{0}$

$\Rightarrow I = |\mathcal{E}\vec{g}|^2 = 0$; $I_a = I\sin^2\theta\cos^2\theta$; $I_b = I\sin^2\theta\cos^2\theta$; $I \neq I_a + I_b$

B) Point de vue corpusculaire probabiliste. (Raisonnement sur le nombre de photons dans le faisceau)

. a seul ouvert : $P(\vec{a} \leftarrow \vec{\iota}) = \cos^2(\vec{a},\vec{\iota}) = \cos^2\theta$; $P(\vec{g} \leftarrow \vec{a}) = \cos^2(\vec{g},\vec{a}) = \sin^2\theta$; $P(\vec{g} \leftarrow \vec{\iota}) = \sin^2\theta.\cos^2\theta = P_a$

. b seul ouvert : $P(\vec{g} \leftarrow \vec{\iota}) = P(\vec{g} \leftarrow \vec{b}).P(\vec{b} \leftarrow \vec{\iota}) = \cos^2\theta.\sin^2\theta = P_b$

. a et b ouvert : $N' = NP_a + NP_b = 2N\sin^2\theta\cos^2\theta$ (flux à la sortie de l'appareil) $\rightarrow$ faux.

C) Amplitudes quantiques.

. Amplitude quantique $\Rightarrow$ probabilité d'amplitude quantique $P = |A|^2$

. $A = A_a + A_b \Rightarrow P = |A_a|^2 + |A_b|^2 + A_a\bar{A}_b + \bar{A}_a A_b$; $A_a = \cos\theta\sin\theta$ et $A_b = -\cos\theta\sin\theta$

4) Règles de calcul sur les amplitudes quantiques.

A) Principe de superposition.

. v état initial, w état final (états intermédiaires virtuels) $\rightarrow P(w \leftarrow v) = |A(w \leftarrow v)|^2$

. Lorsqu'une transition quantique présente un ensemble disjoint et complet d'états intermédiaires, l'amplitude de probabilité de la transition est la somme des amplitudes correspondant à chaque état intermédiaire : $\langle w|v\rangle = \sum_m \langle w|v\rangle_m$

B) Règle de superposition et inégalité de Heisenberg.

Etats intermédiaires réels $\longrightarrow$ (trace de la trajectoire) $\longrightarrow$ Superposition incohérente

→ addition des intensités et non des amplitudes (correspond quantiquement à l'addition des probabilités). Intensité : $2I\cos^2\theta.\sin^2\theta$, probabilité P_a+P_b.

C) Règle de factorisation. Principe de factorisation séquentielle.

Lorsqu'une transition quantique s'effectue par passage dans un état intermédiaire bien défini, l'amplitude de probabilité de la transition est le produit des amplitudes correspondant aux deux stades de la transition (de l'état initial à l'état intermédiaire de l'état intermédiaire à l'état final) : $\langle w|v\rangle_m = \langle w|u_m\rangle\langle u_m|v\rangle$

D) Polarisation circulaire et amplitude complexe.

. $\vec{\pi}$ état de polarisation rectiligne, D état de polarisation circulaire droite, on aura quelque soit $\vec{\pi}$: $|\langle D|\vec{\pi}\rangle|^2 = 1/2 \Rightarrow |\langle D|\vec{\pi}\rangle| = 1/\sqrt{2}$

. Analyseur $A(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow \langle D|\vec{\pi}\rangle = \langle D|\vec{a}\rangle\langle\vec{a}|\vec{\pi}\rangle + \langle D|\vec{b}\rangle\langle\vec{b}|\vec{\pi}\rangle$, avec :

$\langle\vec{a}|\vec{\pi}\rangle = \cos\theta$; $\langle\vec{b}|\vec{\pi}\rangle = \sin\theta$; $|\langle D|\vec{\pi}\rangle| = |\langle D|\vec{a}\rangle| = |\langle D|\vec{b}\rangle| = 1/\sqrt{2}$

. Valeur complexe des amplitudes quantiques : $\Rightarrow \langle D|\vec{a}\rangle = 1/\sqrt{2}$; $\langle D|\vec{b}\rangle = i/\sqrt{2}$; $\langle D|\vec{\pi}\rangle = e^{-i\theta}/\sqrt{2}$

. D et G : états propres de polarisation circulaire pour lesquels $m = 1$ et $m = -1$, sont également états propres de la composante J_z du moment angulaire du photon avec les valeurs propres $+\hbar$ et $-\hbar$.

. Les états D et G restent inchangés par une rotation autour de la direction de propagation du photon (rotation $\delta \Rightarrow \langle\vec{\pi}'|D\rangle = e^{-i\delta}\langle\vec{\pi}|D\rangle$, $\langle\vec{\pi}'|G\rangle = e^{i\delta}\langle\vec{\pi}|G\rangle$), la phase change.

E) Conjugaison des amplitudes, symétrie des probabilités.

. Conjugaison → Les amplitudes quantiques de deux transitions inverses l'une de l'autre sont complexes conjuguées : $\langle w|v\rangle = \overline{\langle v|w\rangle}$

. Symétrie → Les probabilités de deux transitions inverses sont égales : $|\langle w|v\rangle|^2 = |\overline{\langle v|w\rangle}|^2$

F) Trajectoires classiques et amplitudes quantiques.

. Propagation d'un quanton de A vers B → $\langle A|B\rangle = \sum_m \langle A|B\rangle_{C_m} \to \varphi_m = -\int_{C_m} k\,dr$

. $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r} \Rightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t - \vec{k}\Delta\vec{r}$. Si λ = cte sur $C_n \to \varphi_m = -\int_{C_n} \frac{2\pi}{\lambda}dr \to \varphi_m = \frac{2\pi}{\lambda}L_m$

. Action caractéristique : $A \sim pl \gg \frac{h}{\lambda}.\lambda$ car $l \gg \lambda \to A \sim pl \gg h$

. Applications : imagerie en champ sombre (microscopie électronique) → $\delta A = A' - A = (e^{i\delta\varphi} - 1)A$

$\Rightarrow |\delta A|^2 \sim |\delta\varphi|^2|A|^2$ ($\delta\varphi \ll 1$: déphasage de A' par rapport à A)

mesure de l'intensité $\longrightarrow$ mesure de $\delta\varphi$ $\longrightarrow$ mise en évidence de l'interaction électrons-atomes.

5) La diffraction des neutrons.

. Etat cristallin → régularité de l'arrangement spatial des atomes.

. $\lambda \sim a$ (pas du réseau) $a \sim 1 Å$ → $E \sim 0{,}01\,eV$

. Pour un réseau intensité maximum pour $d \sin\theta = p\lambda$

A) Interaction neutron-atome.

. $\lambda_N \sim 10^{-10}\,m$ ⇒ noyaux diffuseurs ponctuels par rapport aux neutrons.

. Diffusion élastique → $E_0 = E$; $p_0 = p$; $\vec{p}_0 \neq \vec{p}$; $(\vec{p}, \vec{p}_0) = \Omega(\theta, \varphi)$

. Diffusion isotrope → aucune direction Ω n'est privilégiée , $\vec{J}_{N \& m} = \vec{0}$

. Section efficace → $\sigma \sim 10^{-28}\,m^2$ – le neutron n'interagit qu'une seule fois dans le cristal.

B) Les pics d'intensité diffractée.

. Hypothèse : Neutron défini par sa seule quantité de mouvement , atomes de spin nul.

. $N(\Omega)$ nombre de neutrons diffusés suivant Ω par unité de temps ; $P(\Omega) \propto N(\Omega)$ (probabilité de diffusion suivant Ω). $P(\Omega) = |\langle \vec{p} | \vec{p}_0 \rangle|^2$ (pour un neutron sur un atome). Donc on a pour 1 neutron sur les n atomes du cristal : $P(\Omega) = \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{p} | \vec{p}_0 \rangle_k \right|^2$. On a trois étapes :

→ $\langle \vec{p} | \vec{p}_0 \rangle_k = \langle \vec{p} | \vec{r}_k \rangle . a . \langle \vec{r}_k | \vec{p}_0 \rangle$ ⇒ $P(\Omega) = |a|^2 \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{p} | \vec{r}_k \rangle \langle \vec{r}_k | \vec{p}_0 \rangle \right|^2$ où

$\vec{r}_k$: état propre de position ; a : amplitude de diffusion (a = cte) (diffusion isotrope).

. L'intensité totale présente des maximums et des minimums.

C) Fond continu et superposition incohérente.

. Neutrons : quantité de mouvement $\vec{p}_0$, spin non nul S. Conservation du moment angulaire total ⇒ $\vec{J} = \vec{S}_n + \vec{S}_N + \vec{L}_{N,n}$ (ici $L_{N,n} \sim 0$). Pour les neutrons on prendra des spins dans l'état propre "↑". Pour le noyau "↑" ou "↓". (Spin 1/2 → val. propres $\pm\hbar/2$ → états propres ↑ et ↓)

. Initialement S_n "↑" : avant et après on a : $J_z = \hbar$

. Initialement S_n "↓" : avant et après on a : $J_z = 0$

→ Sans renversement de spin : $P_a(\Omega) = |a|^2 \left| \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{p} | \vec{r}_k \rangle \langle \vec{r}_k | \vec{p}_0 \rangle \right|^2$

→ Avec renversement de spin : $\langle \vec{p} | \vec{p}_0 \rangle_k^{renv.} = \langle \vec{p} | \vec{r}_k \rangle b \langle \vec{r}_k | \vec{p}_0 \rangle$ ⇒ $P_b(\Omega) = |\langle \vec{p} | \vec{p}_0 \rangle_k^{renv.}|^2$

$n+1$ états finaux possibles (n avec renversement, 1 sans) ⇒ $P(\Omega) = P_a(\Omega) + P_b(\Omega)$

(P_a correspond à une diffusion cohérente et P_b à une diffusion incohérente).